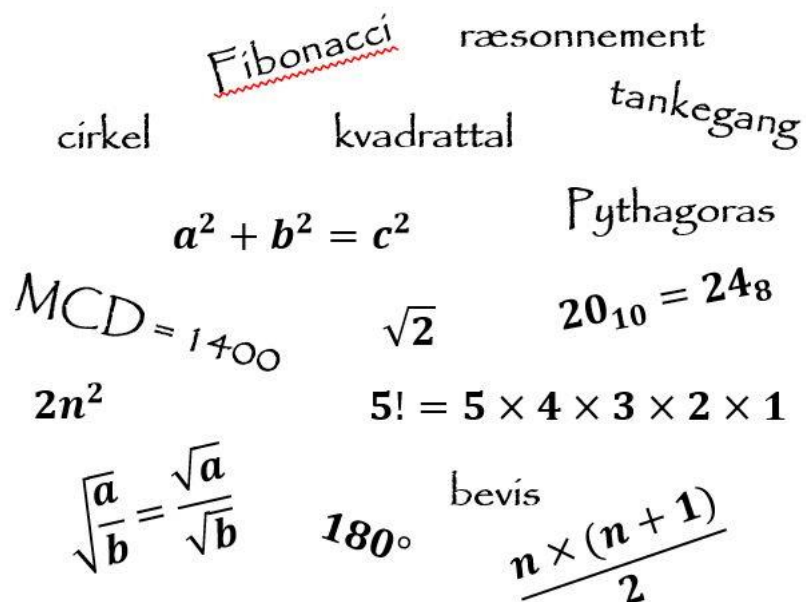




MATEMATISK TANKEGANG OG RÆSONNEMENT

Del 1

10 selvstændige opgaver til arbejdet med ræsonnements - og tankegangskompetencen i overbygningens matematik undervisning.

Af Lasse Heisz Ebsen

Om materialet:

© 2025 Lasse Heisz Ebsen

Titel: Matematisk tankegang og ræsonnement (del 1)

Forsidebillede: Lasse Heisz Ebsen

Alle billeder anvendt i materialet er fremstillet af forfatter.

Udgivet første gang 2019

4.udgave 2025

Udgivet af Lasse Heisz Ebsen

Vestergårdsvej 1

4200 Slagelse

Email: lasseheisz@gmail.com

Al kopiering, analogt og digitalt, af dette materiale eller dele deraf er tilladt i henhold til undervisningsinstitutionens aftale med Tekst og Node. Kopiering, der går ud over begrænsningsreglerne i aftalen med Tekst og Node, kan alene finde sted efter forudgående aftale med licensgiver.

Lærervejledning

Siden kompetenceområderne blev et fokuspunkt i "fælles mål", har jeg interesseret mig for, hvordan man kunne sikre sig, at alle kompetencer blev bragt i spil i udskolingens matematikundervisning. Flere af kompetence områderne giver nærmest sig selv, men så er der dem tilbage, hvor man som lærer kan blive i tvivl om, hvorvidt disse er blevet dyrket intenst nok.

De 10 opgaver der er samlet i dette hæfte, giver et bud på en opgave samling, hvor især én af de helt centrale kompetencer, nemlig *ræsonnements - og tankegangskompetencen* bringes i spil i alle opgaver, og kan dermed anvendes som supplement til den daglige undervisning eller som isoleret forløb i udskolingens matematikundervisning.

Materialet indeholder 10 opgaver, der alle henvender sig til udskolingens matematik undervisning i 8./9. klasse. De 10 opgaver i dette hæfte bevæger sig inden for stofområderne *tal og algebra* samt *geometri*.

Udover at opgaverne træner eleverne i matematisk tankegang og udledning af matematiske ræsonnementer (generaliseringer), styrker opgaverne eleverne i *matematisk argumentation, udledning af algebraiske formler, reduktion og simpel bevisførelse*.

Sværhedsgraden i opgaverne er generel høj, og man skal som lærer selvfølgelig vurdere, om eleverne har de rigtige forudsætninger for at kunne løse den enkelte opgave, inden opgaven stilles. Til gengæld er opgaverne en rigtig god differentieringsmulighed og udfordring til elever i 8./9. klasse. "Makker" - eller gruppearbejde med opgaverne kan stærkt anbefales.

I første omgang et IT-hjælpeprogram ikke tilgodeset. Der er altså ingen af opgaverne der lægger op til løsning vha. *geogebra* eller andre lignende hjælpeværktøjer. Enkelte af opgaverne kan understøttes af f.eks. *geogebra*. Efter min overbevisning, er det vigtigt, at eleverne ind i mellem får mulighed for, at være i en situation, hvor der er mulighed for ro og fordybelse, og hvor det er matematisk tankevirksomhed der er i højsædet, og ikke praktisk anvendelse af IT-værktøjer samt "opmærksomhedsstjælende" muligheder på en online computer.

I forhold til materialets løsningsdel er det vigtigt at pointere, at mine løsningsforslag ikke nødvendigvis afdækker alle muligheder, da nogle opgaver muligvis kan løses på andre måder end jeg har valgt at gøre i løsningsforslagene. Opgaver og løsningsforslag er relativt gennemarbejdede, men skulle du mod forventning finde fejl eller har forslag til rettelser, så er du velkommen til at kontakte mig pr. mail.

Jeg håber du vil finde materialet brugbart. Matematisk tankegang og ræsonnement del 2 er allerede under udarbejdelse.

På næste side finder du en oversigt over de enkelte opgaver i dette hæfte, sværhedsgrad, forventet tidsforbrug mm.

Med venlig hilsen

Lasse Heisz Ebsen

INDHOLD:

OPGAVE	SVÆRHEDSGRAD	ARBEJDSSTID	MATEMATIKKEN I OPGAVEN
Nr.1 - Talfølger	☆☆	Ca. 1-2 lektioner	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Talrækker, værdien "n", formler til bestemmelse af "n".
Nr.2 - Et tændstik mønster	☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Areal og omkreds, voksende figurrækker, værdien "n", formler til bestemmelse af "n".
Nr.3 - Blomsten	☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Geometri Underemner: Areal og omkreds af cirkler og kvadrater, Pythagoras.
Nr.4 - Et talmysterie	☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Positionssystemet (talsystemet).
Nr.5 - Ottetalsystemet	☆☆☆☆	Ca. 2 lektioner	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Positionssystemet, ottetalsystemet.
Nr.6 - Drejede kvadrater	☆☆☆	Ca. 1-2 lektioner	Overordnet område: Geometri Underemner: Areal af kvadrater, figurrækker, Pythagoras, formler til bestemmelse af "n".
Nr.7 - Fibonacci	☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Geometri Underemner: Omkreds af cirkler, figurrækker.
Nr.8 - Et mønster med centicubes	☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Voksende figurrækker, værdien "n", formler til bestemmelse af "n", (toer - potenser).
Nr.9 - Et mønster med centicubes (2)	☆☆☆☆	Ca. 1-2 lektioner	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Voksende figurrækker, reduktion, værdien "n", formler til bestemmelse af n.
Nr.10 - Højde i en ligesidet trekant	☆☆☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Geometri Underemner: Pythagoras, regler om kvadratrødder, reduktion.

Vedr. "sværhedsgrad": Opgavernes sværhedsgrad er forsøgt vurderet ud fra et "middel" 9.klasse niveau. "Tre stjerner" indikerer, at det må være forventeligt, at en middel elev i 9.klasse vil kunne arbejde selvstændigt med det meste af opgaven. Færre stjerner indikerer at opgaven er "lettere", og flere end tre stjerner indikerer, at opgaven vil være vanskeligere at løse.

Vedr. "arbejdstid": Den forventelige arbejdstid med opgaven er vurderet ud fra antallet af delspørgsmål samt sværhedsgrad, og er inklusiv læreropfølgning.

Andre opmærksomheds punkter: Opgave 9 "Et mønster med centicubes (2)" skal printes i farve.

TALFØLGER

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

I nedenstående skema er vist nogle talfølger.

En talfølge er en række af tal som følger et bestemt mønster eller en bestemt "regel".

Hvis man kender "reglen" kan man måske udtrykke den som algebraisk formel med bogstavet n .

Bogstavet n er i denne sammenhæng et vilkårligt *trin* i den beskrevne talrække.

(Mere teoretisk: Bogstavet n står for "naturlige tal", som er alle positive heltal)

	Trin 1	Trin 2	Trin 3	Trin 4	Trin 5	Trin 10	Formel eller "Regel" for n 'te trin
TALFØLGE 1	2	3	4	5	6	11	$n + 1$
TALFØLGE 2	2	4					$2n$
TALFØLGE 3	1	3	5	7	9		
TALFØLGE 4	1	4	9	16	25		
TALFØLGE 5	4	7	10	13	16		
TALFØLGE 6	4	16					$2n^2$
TALFØLGE 7	2	6	10	14	18		
TALFØLGE 8*	1	2					$n!$
TALFØLGE 9	0	7	26	63	124		
TALFØLGE 10	3	13	23	33	43		
TALFØLGE 11	1	3	6	10	15		

* note ($n!$ står for n fakultet. Eks. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)

OPGAVER -

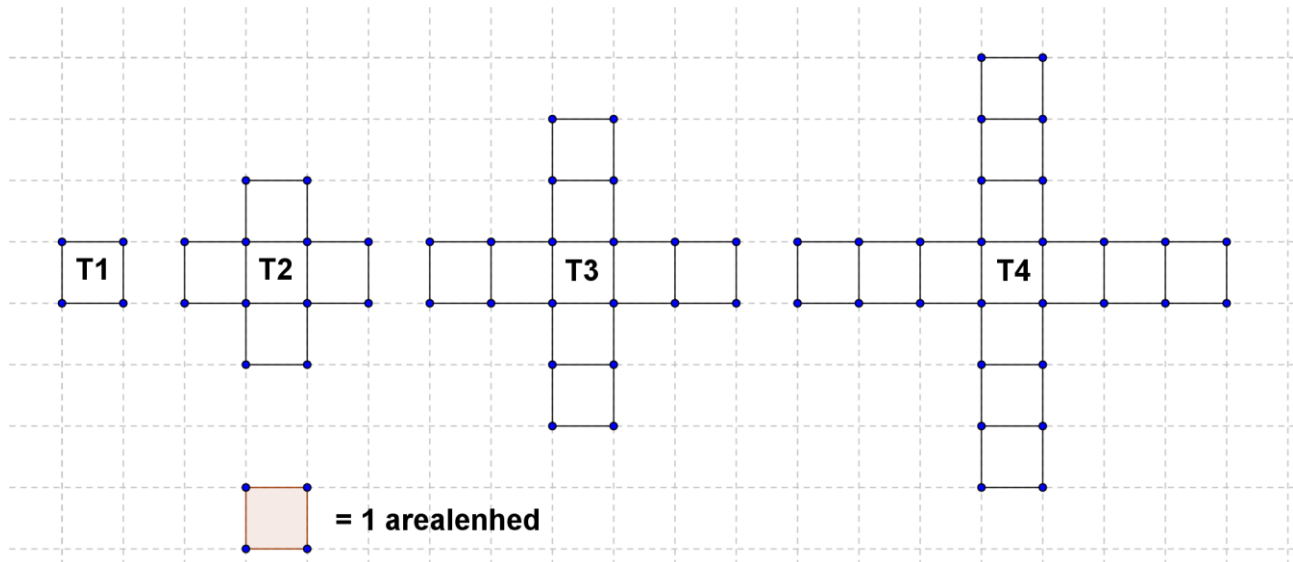
1. Beregn 3., 4. og 5. tal i talfølge 2, 6 og 8 ved hjælp af formlerne for trin nr. n .
2. Bestem det 10. tal i alle talfølgerne.
3. Forsøg at finde en formel, der gælder for trin n i alle talfølgerne.

ET TÆNDSTIKMØNSTER

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder ses en figurrække.

Figurene er sammensat af streger eller "tændstikker". En streg mellem to punkter udgør én tændstik.



OPGAVER -

1. Hvor mange tændstikker er der i hver af de fire figurer ovenfor ?
2. Hvad er omkredsen af hver figur ?
3. Hvad er arealet af hver figur ?
4. Forsøg at finde et udtryk til bestemmelse af n 'te antal til hvert spørgsmål.
5. Udfyld skemaet herunder.

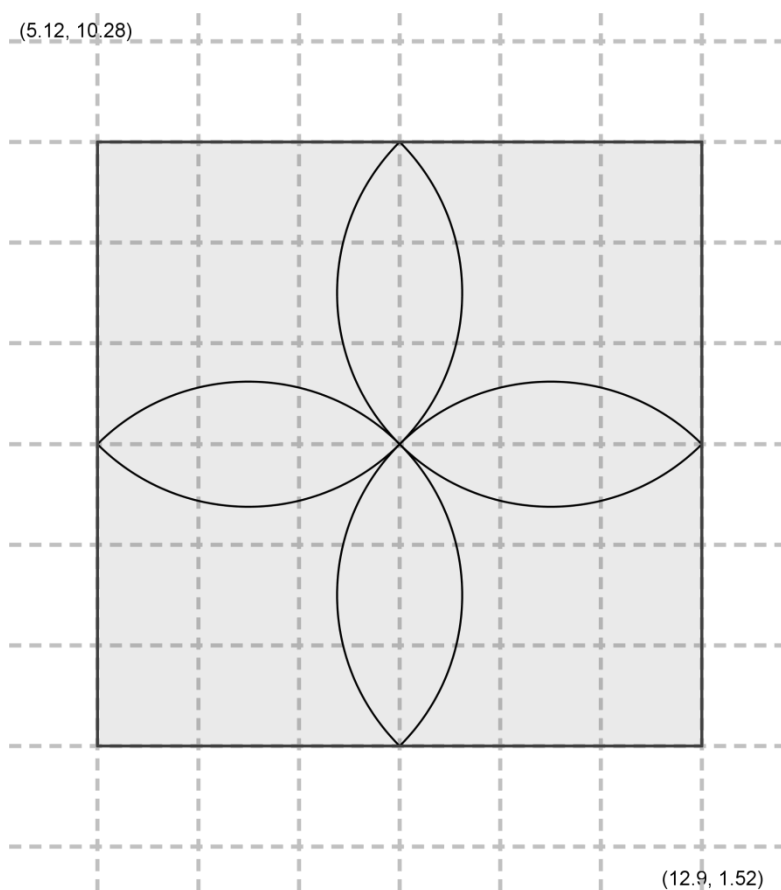
FIGUR NR.	1	2	3	4	5	10	n ?
ANTAL TÆNDSTIKKER							
OMKREDS							
AREAL							

BLOMSTEN

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder ses en ”blomst” konstrueret af cirkelbuer i et kvadrat.

Kvadratet måler 6 x 6 cm.



OPGAVER -

1. Hvilken figur har den længste omkreds - *kvadratet* eller *cirkelblomsten* ?
2. Bestem arealet af cirkelblomsten.

ET TALMYSTERIE

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Tal kan have mange forunderlige egenskaber. Denne opgave handler om *tallet 11*, og det der sker, hvis du multiplicerer tallet 11 med et hvilket som helst tocifret tal.

Her følger en påstand om multiplikation med tallet 11.

Hvis du ganger et tocifret tal med 11, så kan du blot tage tallets tværsom, og herefter sætte tværsommen ind mellem tallet. Nu har du facit.

Fx 11×32 .
Tværsommen af 32 er 5.
Mit facit er 352.

E	K	S.							
					1	1	x	3	2
		1	x	3	2	=		3	2
+	1	0	x	3	2	=	3	2	0
							3	5	2

På billedet til højre er vist et Regneeksempel du kan bruge i din opgaveløsning.

Hvis tværsommen er over 9 lægges 1 til tallet på tierens plads.

Fx 11×84 .

Tværsommen af 84 er 12.

Mit facit er 924. (Der er lagt 1 til 8 og skrevet 2 mellem tallet)

OPGAVER -

1. Undersøg påstanden ovenfor vha. flere taleksempler.
2. Begrund *hvorfor* eller *hvorfor ikke* påstanden holder.

OTTE - TALSYSTEMET

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

X₈

Normalt når vi skriver tal, regner, løser opgaver og tænker matematik, så gør vi det med grundtallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Vores talsystem kaldes *ti - talsystemet*, og det gør det fordi, at vi har ti grundtal til, at repræsentere alle andre tal med.

Ti - talsystemet er et positionssystem. I tallet 8664 vil cifret længst til højre repræsenterer antallet af *enere*, og herefter følger (mod venstre) antallet af *tiere*, *hundreder* og *tusinder*. Et ciffers position fortæller altså noget om dets værdi. I ti - talsystemet kan alle tal skrives som 10^{ér} potenser:

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ osv.

Der findes andre talsystemer end ti - talsystemet. For eksempel *otte - talsystemet*. I otte - talsystemet bruges grundtallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 til at repræsentere alle andre tal. I tallet 25 vil cifret 5 således repræsentere antallet af enere, mens cifret 2 repræsenterer antallet af *ottere*.

I ti - talsystemet vil tallet kun hedde 21, $(2 \times 8) + 5 = 21$.

Otte - talsystemet er også et positionssystem, og som i ti - talsystemet repræsenterer positionen længst til højre antallet af *enere*. Men da otte - talsystemet er baseret på, at samle "*bunker af otte*", ser de efterfølgende positioner noget anderledes ud. I otte - talsystemet kan alle tal skrives som potenser af otte.

$8^0 = 1$, $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$ osv.

For at vi kan skelne mellem tal skrevet i forskellige talsystemer, skrives talsystemet som et fodtegn til tallet. Dvs. 21 i ti - talsystemet skrives som 21₁₀, mens det i otte - talsystemet skrives som 25₈.

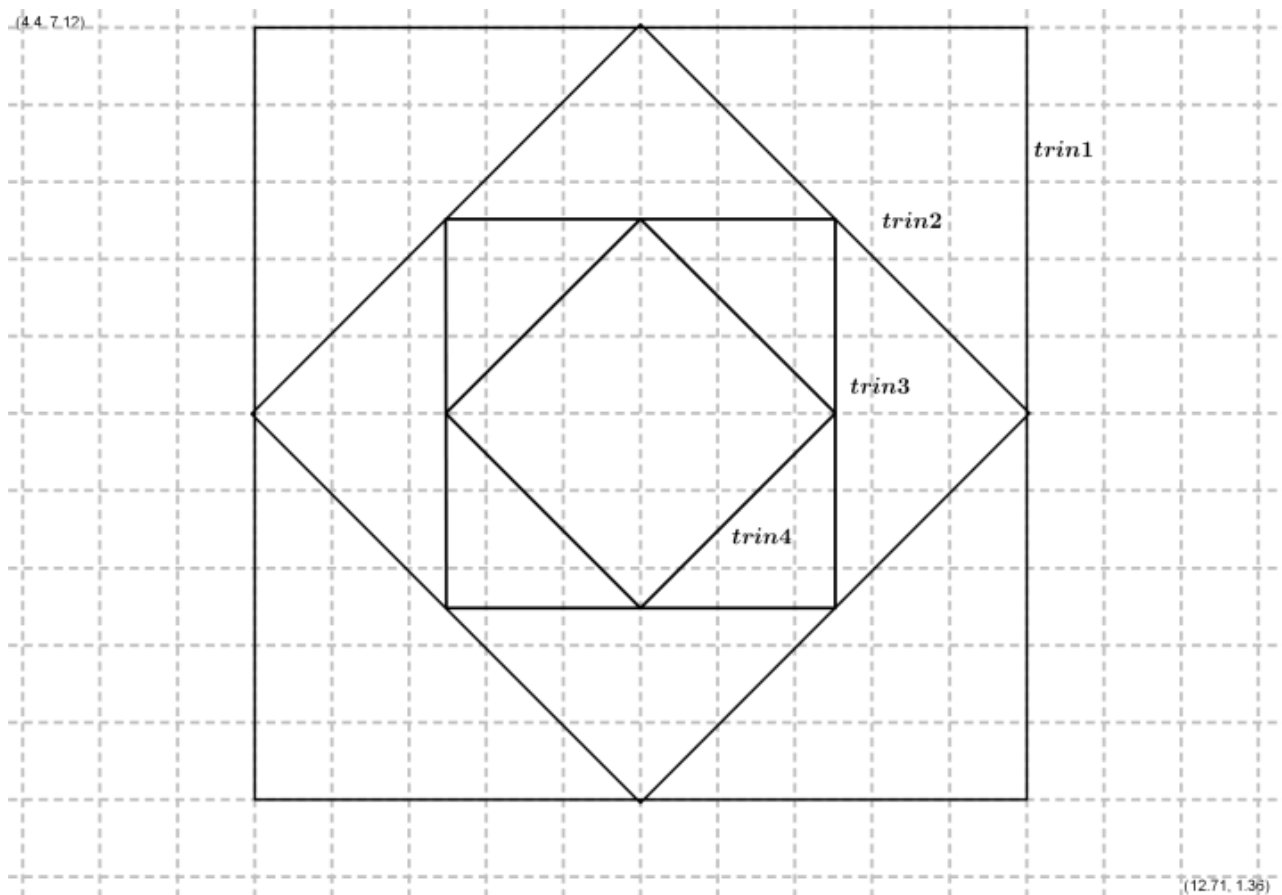
OPGAVER -

1. Lav en konverteringstabel hvor du "*oversætter*" alle tal fra 0-32₁₀ til otte - talsystemet.
2. Oversæt 1000₁₀ og 9999₁₀ til otte - talsystemet og 1000₈ og 7777₈ til ti - talsystemet.
3. Beskriv hvordan du kan oversætte fra X₁₀ til X₈ og fra X₈ til X₁₀.
4. Løs disse regneopgaver uden at oversætte til ti - talsystemet.
a. $(45_8 + 67_8)$ b. $(274_8 + 655_8)$ c. $(444_8 - 177_8)$

DREJEDE KVADRATER

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder ses en række kvadrater ”sat” ind i andre kvadrater. De indre kvadrater er drejet således, at kvadraternes hjørner hæfter på midtpunkterne af det omkring liggende kvadrats sider.



OPGAVER -

1. Hvis arealet af det yderste kvadrat er 100, hvad er så arealet af det næst - yderste ?
2. Undersøg hvad der sker med arealet af kvadraterne, hver gang vi vælger et kvadrat tættere på centrum.
3. Udfyld skemaet herunder. Trin 1 er yderste kvadrat, trin 2 næst-yderste osv.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	10	n ?
AREAL AF KVADRATER	100							

4. Hvad er arealet af det mindst mulige kvadrat ?
5. Forsøg at forklare hvad arealet bliver i et tilfældigt kvadrat, hvis systemet fortsættes. Det tilfældige kvadrat kan f.eks. betegnes n .

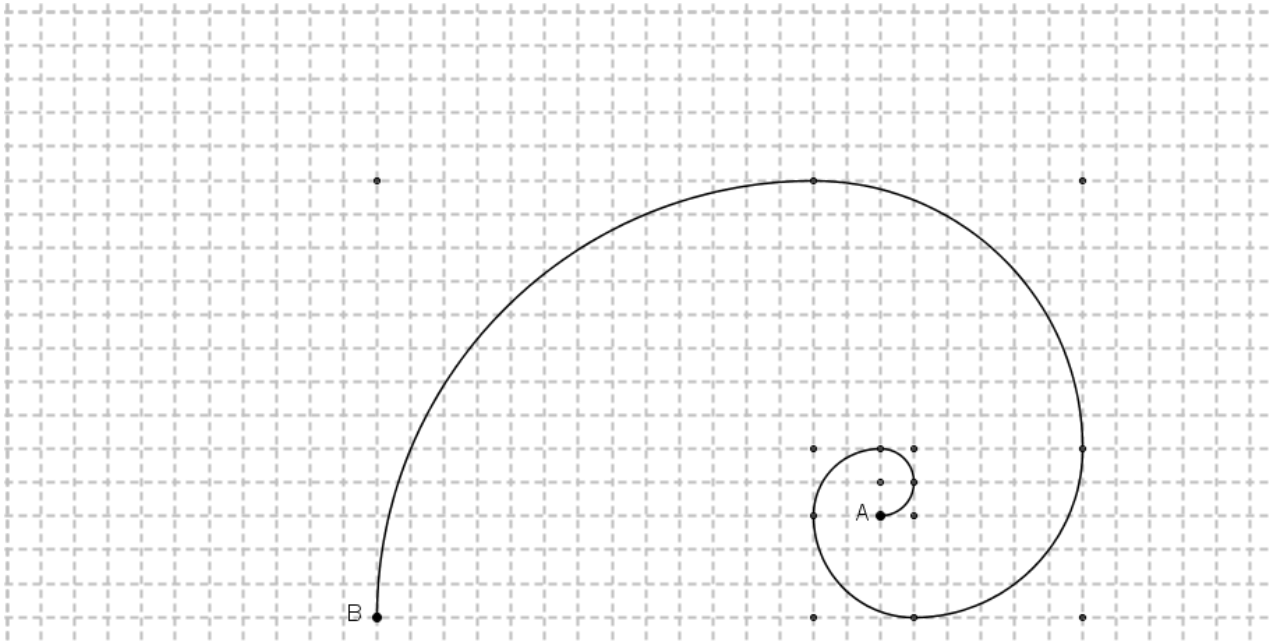
FIBONACCI SPIRALEN

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Fibonacci spiralen er opkaldt efter den italienske matematiker Leonardo Fibonacci.

Spiralen er dannet efter en bestemt talfølge. Denne talfølge blev første gang beskrevet i år 1202 af Fibonacci, men har muligvis været kendt længe før.

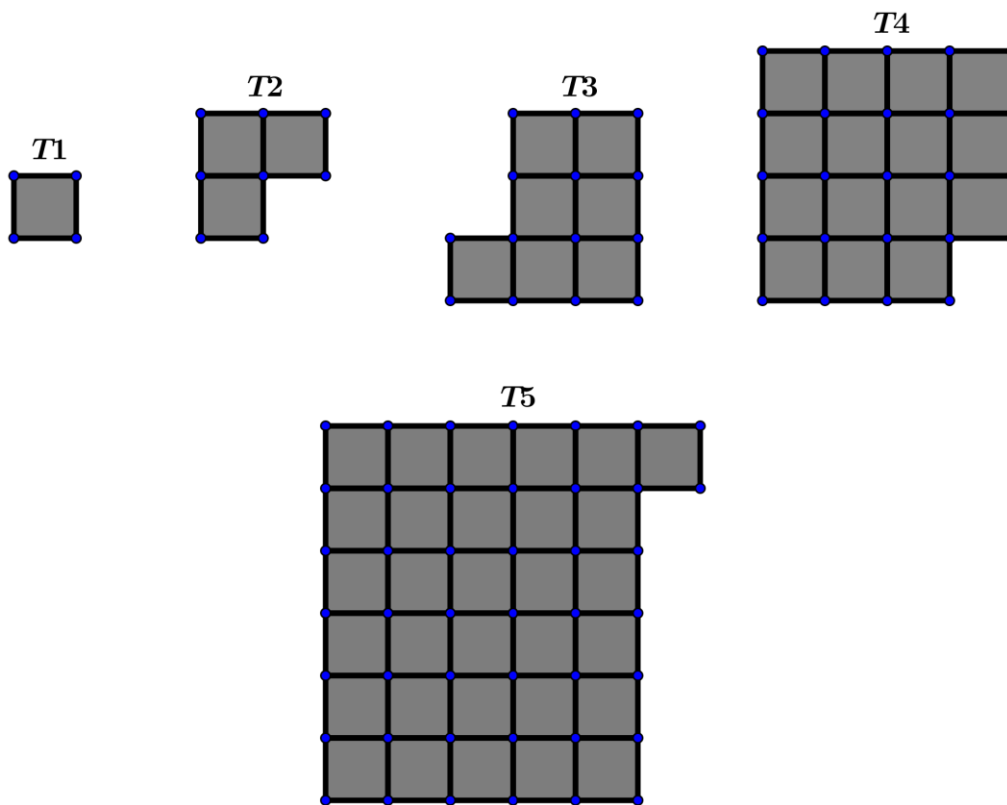
Noget af det der gør Fibonacci-tallene særlig specielle er, at de kan findes i visse naturlige spiralmønstre, f.eks. når man tæller frø i solsikkeblomster, skæl i kogler eller buketter i blomkålshoveder.



Et mønster med centicubes

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder er vist en figurrække. T1 står for *trin 1*, T2 for *trin 2* osv.



OPGAVER -

1. Undersøg antallet af centicubes i figurerne på trin 1 - 5, og udfyld tabellen herunder. (*indtil trin 5*)

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	10	n ?
ANTAL CUBES	1							

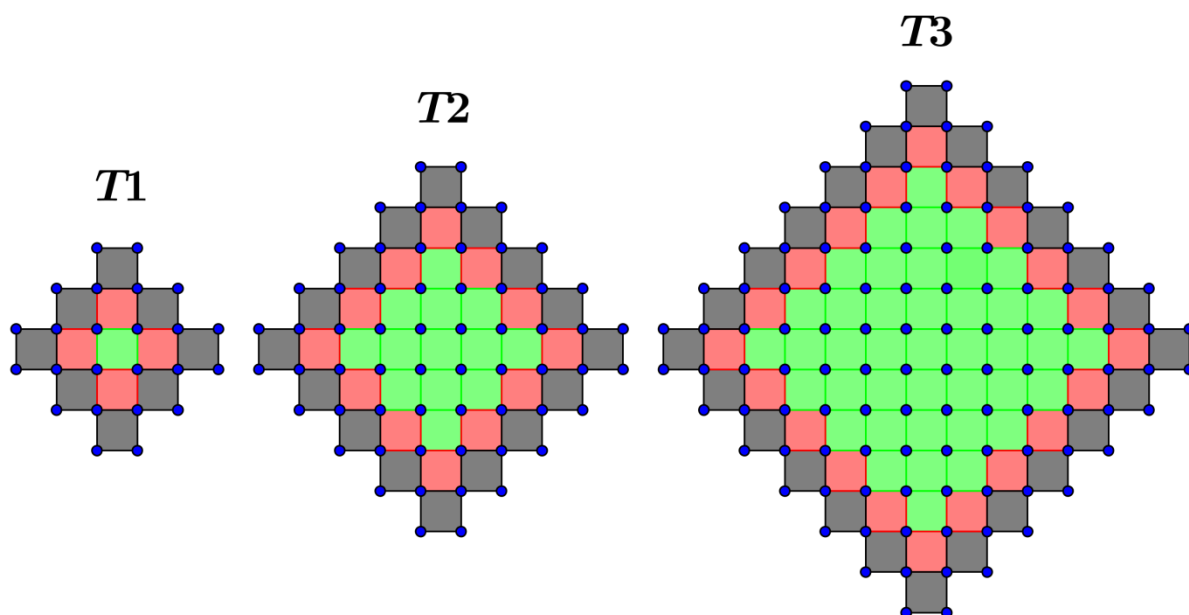
2. Forsøg at bestemme antallet af centicubes på trin 6 og 10. (*udfyld tabellen*)

3. Forsøg at finde et udtryk der gælder for antallet af centicubes på trin n .

Et mønster med centicubes (2)

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder er vist en figurrække. T1 står for *trin 1*, T2 for *trin 2* osv.



OPGAVER -

1. Undersøg antallet af centicubes i figurerne på trin 2, 3 og 4, og udfyld tabellen herunder indtil trin 4.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	10	n ?
GRØNNE CUBES	1						
RØDE CUBES	4						
SORTE CUBES	8						

2. Forsøg at finde et udtryk der gælder for antallet af røde centicubes på trin n . (Udfyld tabellen)

3. Forsøg at finde et udtryk der gælder for antallet af sorte centicubes på trin n . (Udfyld tabellen)

4. Reducér udtrykket $(n + n - 1)^2 + (n + n - 2)^2$ og vis, at det gælder for antallet af grønne centicubes. (Udfyld tabellen)

5. Forsøg at finde et udtryk der gælder for det samlede antal centicubes på trin n .

HØJDE I EN LIGESIDET TREKANT

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Figuren nedenfor viser en ligesidet trekant med sidelængden a .

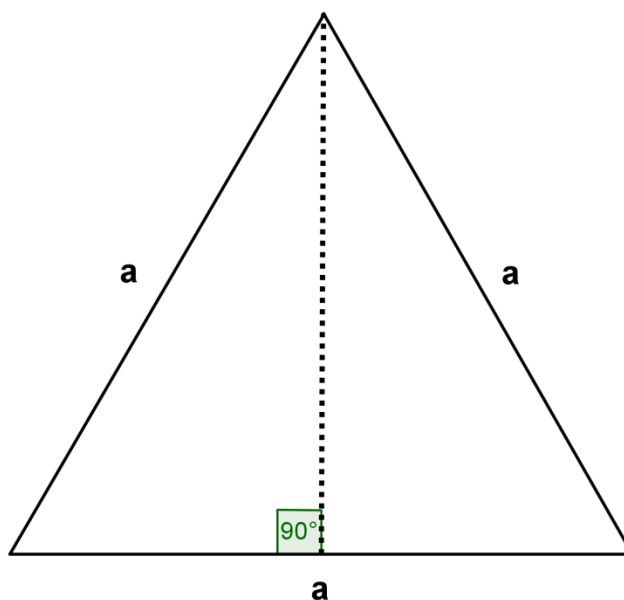
Trekantens ene højde er vist ved den stiplede linje.

For at løse opgaven kan man have brug for at kende disse regler om *kvadratrødder*...

Når a og b er positive tal gælder at...

Regel 1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Regel 2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



OPGAVER -

1. Bevis at den tegnede højde har længden... $\frac{a}{2} \times \sqrt{3}$.

OPGAVE 1 - "Talfølger"

Løsninger opg. 1, 2 og 3.

	1. TAL	2. TAL	3. TAL	4. TAL	5. TAL	10. TAL	"Regel" for n'te tal
TALFØLGE 1	2	3	4	5	6	11	$n + 1$
TALFØLGE 2	2	4	6	8	10	20	$2n$
TALFØLGE 3	1	3	5	7	9	19	$2n - 1$
TALFØLGE 4	1	4	9	16	25	100	n^2
TALFØLGE 5	4	7	10	13	16	31	$3n + 1$
TALFØLGE 6	4	16	36	64	100	400	$2n^2$
TALFØLGE 7	2	6	10	14	18	38	$4n - 2$
TALFØLGE 8*	1	2	6	24	120	3628800	$n!$
TALFØLGE 9	0	7	26	63	124	999	$n^3 - 1$
TALFØLGE 10	3	13	23	33	43	93	$10n - 7$
TALFØLGE 11	1	3	6	10	15	55	$\frac{n+n^2}{2}$

* note ($n!$ står for n faktoriel. Eks. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)

OPGAVE 2 - "Et tændstik mønster"

1. Antallet af tændstikker er henholdsvis 4, 16, 28 og 40.

2. Omkredsen er henholdsvis 4, 12, 20 og 28.

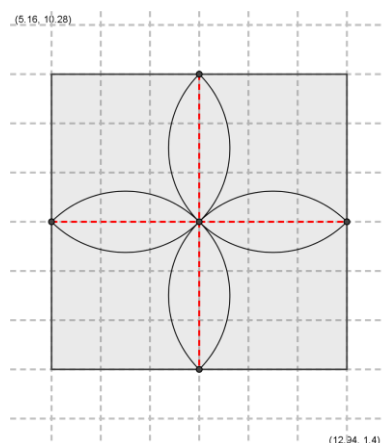
3. Arealet er henholdsvis 1, 5, 9 og 13.

4./5.

FIGUR NR.	1	2	3	4	5	10	$n ?$
ANTAL TÆNDSTIKKER	4	16	28	40	52	112	$12(n - 1) + 4$
OMKREDS	4	12	20	28	36	76	$8(n - 1) + 4$
AREAL	1	5	9	13	17	37	$4(n - 1) + 1$

OPGAVE 3 - "Blomsten"

1. Opgaven kan løses både ved beregning og ved hurtig argumentation. Fx fremgår det af tegning 1 til højre, at længden af de to cirkelbuer langs kvadratets vandrette spejlingsakse, er længere end selve spejlingsaksen, der har samme længde som sidelængden i kvadratet. Blomsten har i alt 4 på hinanden følgende cirkelbuer langs de viste spejlingsakser. De er alle hver især længere end de viste spejlingsakser, og dermed må den samlede omkreds af "blomsten" være længere end kvadratet.



Tegning 1

Omkredsen af cirkelblomsten kan endvidere beregnes. Som skitseret på tegning 2 til højre, kan blomstens "blade" foldes ud således, at omkredsen af to blade tilsammen udgør omkredsen af en cirkel. I en sådan cirkel vil diameteren kunne beregnes ved pythagoras.

$$\text{Diameter} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,24 \text{ cm}$$

Hermed kan omkredsen af hele blomsten beregnes. Blomsten udgør tilsammen to hele cirkler, med en diameter på 4,24 cm.

$$\text{Omkreds blomst} = 4,24 \times \pi \times 2 = 26,64 \text{ cm}$$

$$\text{Omkreds kvadrat} = 4 \times 6 = 24,00 \text{ cm}$$

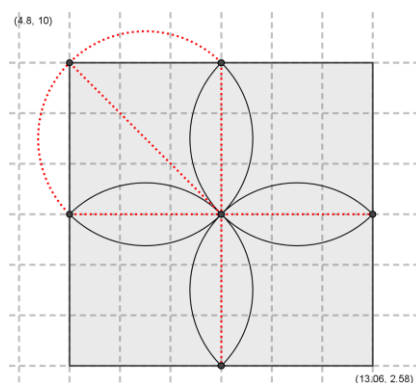
Hermed er vist, at blomstens omkreds er længere end kvadratets.

2. Som det fremgår af tegning 2 til højre, må arealet af to af cirkelblomstens blade kunne findes ved arealet af den skitserede cirkel minus areal af indskrevet kvadrat.

Da vi allerede kender cirkelns diameter, kan radius let bestemmes. $\text{Radius} = \frac{4,24}{2} = 2,12 \text{ cm}$

$$\text{Areal af to "blade"} = (2,12^2 \times \pi) - 3^2 = 5,12 \text{ cm}^2$$

$$\text{Samlet areal cirkelblomst} = 5,12 \times 2 = 10,24 \text{ cm}^2$$



Tegning 2

OPGAVE 4 - "Et talmysterie"

1. Lav undersøgelse med forskellige taleksempler. Undersøgelsen vil vise, at påstanden holder.

2. Påstanden holder fordi, at multiplikationen med 11 er "sammensat" af en multiplikation med 1 og det to-cifrede tal samt med 10 og det to-cifrede tal. Multiplikationen med 1 vil altid give tallet selv. Multiplikationen med 10 vil give tallet selv efterfulgt af et nul (positionerne rykkes en plads til venstre). Adderes de to tal jf. positionssystemet, vil "tiernes plads" nu bestå af samme cifre som det oprindelige to-cifrede tal, og dermed opnås et tal svarende til det to-cifrede tals tværsam.

Eks. 11×62 tallets tværsom er $(6 + 2) = 8$ resultatet skal da være $= 682$

11×62 svarer til $(1 \times 62) + (10 \times 62)$ dvs. $62 + 620$

Jf. traditionel positions opstilling:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 2 \\ 6 \quad 2 \quad 0 \end{array} = 682$$

Hvis tværsommen er over 9, vil det betyde, at der er "samlet" mindst ti tiere i additionen på tiernes plads, og derfor stiger tallet yderst til venstre med netop 1.

OPGAVE 5 - "Otte-talsystemet"

1. En konverteringstabel fra ti-talsystem til otte-talsystem:

<i>ti-talsystem</i>	<i>otte-talsystem</i>		<i>ti-talsystem</i>	<i>otte-talsystem</i>
0	0		16	20
1	1		17	21
2	2		18	22
3	3		19	23
4	4		20	24
5	5		21	25
6	6		22	26
7	7		23	27
8	10		24	30
9	11		25	31
10	12		26	32
11	13		27	33
12	14		28	34
13	15		29	35
14	16		30	36
15	17		31	37
			32	40

2. I oversættelsen fra *ti-talsystemet* til *otte-talsystemet*, eller fra *otte-talsystemet* til *ti-talsystemet*, anvendes vores viden om *positionerne* i otte talsystemet, som *potenser af otte*.

$$8^0 = 1 \quad 8^1 = 8 \quad 8^2 = 64 \quad 8^3 = 512 \quad 8^4 = 4096$$

Oversættelse: 1000_{10}

tal_{10}	delt med:	tal_8
1000	$8^3 = 512$	1
rest 488	$8^2 = 64$	7
rest 40	$8^1 = 8$	5
rest 0	$8^0 = 0$	0

Resultat = 1750_8 **Oversættelse: 9999_{10}**

tal_{10}	delt med:	tal_8
9999	$8^4 = 4096$	2
rest 1807	$8^3 = 512$	3
rest 271	$8^2 = 64$	4
rest 15	$8^1 = 8$	1
rest 7	$8^0 = 1$	7

Resultat = 23417_8 **Oversættelse 1000_8 til x_{10} :** $(1 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (0 \times 8^1) + (0 \times 8^0) = 512_{10}$ **Oversættelse 7777_8 til x_{10} :** $(7 \times 8^3) + (7 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (7 \times 8^0) = 4095_{10}$

3. Som vist ovenfor, anvendes "værdien" af positionerne i *otte-talsystemet* når der skal oversættes, enten fra det ene system eller det andet.

Når vi skal oversætte fra x_{10} til x_8 gøres det ved, at *dividere* tallet med den højest mulige *potens af otte*. Divisionens resultat noteres, "resten" udregnes. Herefter divideres "resten" med den nu højest mulige potens af otte. Dette system fortsættes, indtil antal *enere* er bestemt. (Se eksempler ovenfor)

Når vi skal oversætte fra x_8 til x_{10} gøres det ved, at multiplicere positionernes cifre med positionernes værdier som potenser af otte. Herefter adderes resultaterne. (Se eksempler ovenfor)

4. Opgaverne kan løses som "almindelige" regnestykker, og med "almindelige" algoritmer", dog med den væsentlige forskel, at den tidligere vante *tier overgang* nu er en *otter overgang*. Dette har afgørende indflydelse hvis man f.eks. skal sætte i *mente* eller "*låne*".

a.

			4	5
+			6	7
		1	3	4

b.

		2	7	4
+		6	5	5
	1	1	5	1

c.

		4	4	4
-		1	7	7
		2	4	5

OPGAVE 6 - "Drejede kvadrater"

1. Der kan uden beregninger argumenteres for, at arealet af det næst-yderste kvadrat må være det halve af det yderste kvadrat. Det yderste kvadrat kan deles i *fire* lige store kvadrater. (Med linjer fra alle midtpunkter på yderste kvadrat og til centrum).

I disse kvadrater udgør siderne i det næst-yderste kvadrat diagonalen, og halverer dermed arealerne.

Da det næst-yderste kvadrat er "sat sammen" af

fire kongruente retvinklede trekanter, hvis arealer hver især udgør det halve af det yderste kvadrats *fire* lige store kvadrater, må det samlede areal dermed være halveret.

Der kan dog også foretages en beregning der viser, at arealet af det næst yderste kvadrat faktisk er halvdelen af det yderste. Sidelængderne i det næst yderste kvadrat kan bestemmes vha.

pythagoras. $\sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07107$

Dermed er arealet $7,07107^2 = 50$.

2. Ovenstående "mønster" forsætter hver gang vi vælger et kvadrat et trin tættere på centrum, og dermed halveres arealet for hver gang. Der kan argumenteres som ovenfor.

3.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	10	<i>n</i> ?
AREAL AF KVADRATER	100	50	25	12,5	6,25	3,125	0,195	se opg.5

4. Det mindst mulige kvadrat findes ikke. Man kan i teorien blive ved med at "halvere".

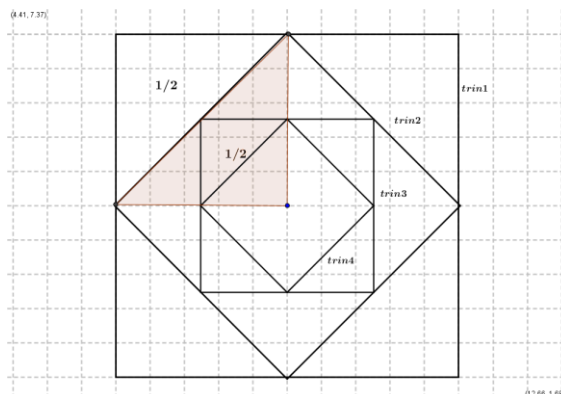
5. Yderste kvadrat er 100. Herefter deles der konstant med 2. Delingen bliver dermed potenser af 2. Første trin er en deling med 2, andet trin er en deling med 2×2 , tredje trin en deling med $2 \times 2 \times 2$ osv. Med denne viden kan der konstrueres en formel for udviklingen.

$$\text{Formel for } n\text{'te kvadrat} = \frac{100}{2^{(n-1)}}$$

OPGAVE 7 - "Fibonacci spiralen"

1.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	7	8	<i>n</i> ?
RADIUS I "KVARTCIRKLER"	1	1	2	3	5	8	13	21	se opg.5



2. Spiralen består af sammensatte kvartcirkler. Længden af spiralen (indtil trin 7) kan bestemmes ved formelen for cirkelns omkreds: $O = 2 \times r \times \pi$.

$$\frac{(2 \times 1 \times \pi)}{4} + \frac{(2 \times 1 \times \pi)}{4} + \frac{(2 \times 2 \times \pi)}{4} + \frac{(2 \times 3 \times \pi)}{4} + \frac{(2 \times 5 \times \pi)}{4} + \frac{(2 \times 8 \times \pi)}{4} + \frac{(2 \times 13 \times \pi)}{4} = 51,84$$

3. Radius i kvartcirkel 8 er 21. Den kan bestemmes ved *optælling* på opgavearket eller *udregnes* vha. talrækken. Begge dele kræver, at man "*kan se systemet*", hvor den nye radius er lig summen af de to forrige.

4. Fibonacci spiralen vokser hele tiden med *summen af de to forrige "Fibonacci tal"*.

OPGAVE 8 - "Et mønster med centicubes"

1. Tabellen kan udfyldes ved "optælling" af centicubes i figur 1-5 på opgavearket. Trin 6 og trin 10 skal enten tegnes eller udregnes. Ses på væksten fra trin 1 til trin 5, så stiger antallet af centicubes med 2, 4, 8 og 16. Fortsættes dette mønster, må antallet af centicubes stige med 32 fra trin 5 til trin 6. Herefter 64, 128, 256, og endelig 512 fra trin 6 til trin 10. Tabellen kan herefter udfyldes ved simpel addition.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	10	<i>n ?</i>
ANTAL CUBES	1	3	7	15	31	63	1023	

2. Se ovenfor.

3. Som det måske ses af "væksttallene" fra opgave 1, så er alle disse potenser af 2. Sammenholdes disse væksttal med antallet af cubes på de forskellige trin, ses det, at de alle er netop én mindre end den beskrevne række af toerpotenser (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024)

Ud fra denne sammenhæng, kan der let konstrueres en formel: $2^n - 1$

Hvor n er trinnummeret i figurrækken.

OPGAVE 9 - "Et mønster med centicubes"

1. Tabellen kan delvis udfyldes ved optælling af antal centicubes i figurerne på opgavearket. For at udfylde trin 4, kan man fortsætte mønsteret. Figurernes "sidelængder" består af de ulige tal, startende fra 3 på trin 1. På trin 4 er "sidelængden" således 9.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	10	<i>n ?</i>
GRØNNE CUBES	1	13	41	85	145	685	
RØDE CUBES	4	12	20	28	36	76	

SORTE CUBES	8	16	24	32	40	80	
-------------	---	----	----	----	----	----	--

2. Som det fremgår af talrækken for de "røde cubes", stiger antallet hele tiden med 8. Antallet er dog 4 mindre end n multipliceret med 8.

Derfor: $8n - 4$

3. Som det fremgår af talrækken for de "sorte cubes", stiger antallet hele tiden med 8. Antallet svarer til n multipliceret med 8.

Derfor: $8n$

4. Reduktion af udtrykket: $(n + n - 1)^2 + (n + n - 2)^2$.

$$(n + n - 1)^2 + (n + n - 2)^2 \leftrightarrow$$

$$(2n - 1)^2 + (2n - 2)^2 \leftrightarrow$$

$$(2n - 1)(2n - 1) + (2n - 2)(2n - 2) \leftrightarrow$$

$$4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 - 8n + 4 \leftrightarrow$$

$$8n^2 - 12n + 5$$

5. Det samlede antal centicubes må derfor være:

$$(8n^2 - 12n + 5) + (8n - 4) + (8n) = 8n^2 + 4n + 1$$

OPGAVE 10 - "Højde i en ligesidet trekant"

Løsning: (Pythagoras)

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \quad (\text{der er subtraheret med } \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \text{ på begge sider})$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 \quad (\text{højre side er udregnet})$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad (\text{højre side er udregnet})$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a} \quad (\text{kvadratroden er taget på begge sider jf. regel } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b})$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times a \quad (\text{regel om kvadratrødder anvendes jf. } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a \quad (\text{brøkens nævner er udregnet})$$

$$h = \frac{a}{2} \times \sqrt{3} \quad (\text{omskrivning})$$

