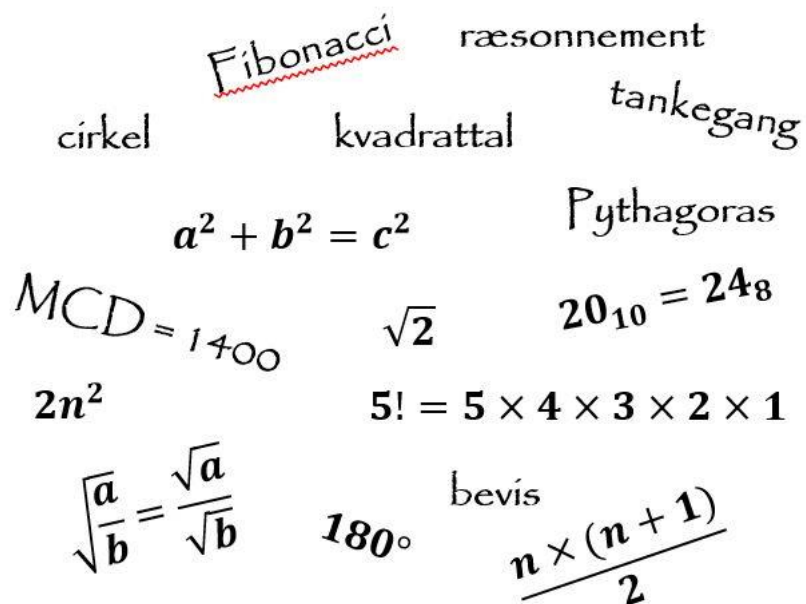




MATEMATISK TANKEGANG OG RÆSONNEMENT

Del 2

10 selvstændige opgaver til arbejdet med ræsonnements - og tankegangskompetencen i overbygningens matematik undervisning.

Af Lasse Heisz Ebsen

Om materialet:

© 2025 Lasse Heisz Ebsen

Titel: Matematisk tankegang og ræsonnement (del 2)

Forsidebillede: Lasse Heisz Ebsen

Alle billeder anvendt i materialet er fremstillet af forfatter.

Udgivet første gang 2019

4.udgave 2025

Udgivet af Lasse Heisz Ebsen

Vestergårdsvej 1

4200 Slagelse

Email: lasseheisz@gmail.com

Al kopiering, analogt og digitalt, af dette materiale eller dele deraf er tilladt i henhold til undervisningsinstitutionens aftale med Tekst og Node. Kopiering, der går ud over begrænsningsreglerne i aftalen med Tekst og Node, kan alene finde sted efter forudgående aftale med licensgiver.

Lærervejledning

Siden kompetenceområderne blev et fokuspunkt i "fælles mål", har jeg interesseret mig for, hvordan man kunne sikre sig, at alle kompetencer blev bragt i spil i udskolingens matematikundervisning. Flere af kompetence områderne giver nærmest sig selv, men så er der dem tilbage, hvor man som lærer kan blive i tvivl om, hvorvidt disse er blevet dyrket intenst nok.

De 10 opgaver der er samlet i dette hæfte, er en fortsættelse til "Matematisk tankegang og ræsonnement del 1, og er ligesom den første udgivelse, et bud på en opgave samling med fokus på *ræsonnements - og tankegangskompetencen*. Begge materialer kan anvendes som supplement til den daglige undervisning eller som isolerede forløb i udskolingens matematikundervisning.

Alle opgaverne i materialet henvender sig til udskolingens matematik undervisning i 8./9. klasse, og bevæger sig inden for stofområderne *tal og algebra* samt *geometri*.

Udover at opgaverne træner eleverne i matematisk tankegang og udledning af matematiske ræsonnementer (generaliseringer), styrker opgaverne eleverne i *matematisk argumentation, udledning af algebraiske formler, reduktion og simpel bevisførelse*.

Sværhedsgraden i opgaverne er generel høj, og man skal som lærer selvfølgelig vurdere, om eleverne har de rigtige forudsætninger for at kunne løse den enkelte opgave, inden opgaven stilles. Til gengæld er opgaverne en rigtig god differentieringsmulighed og udfordring til elever i 8./9. klasse. "Makker" - eller gruppearbejde med opgaverne kan stærkt anbefales.

I første omgang et IT-hjælpeprogram ikke tilgodeset. Der er altså ingen af opgaverne der lægger direkte op til løsning vha. *geogebra* eller andre lignende hjælpeværktøjer. Enkelte af opgaverne kan understøttes af f.eks. *geogebra*. Bl.a. kan *regressionsanalyse* i *Geogebra* anvendes som hjælp til at finde formler til bestemmelse af n 'te værdier. Efter min overbevisning, er det vigtigt, at eleverne ind i mellem får mulighed for, at være i en situation, hvor der er mulighed for ro og fordybelse, og hvor det er matematisk tankevirkomhed der er i højsædet, og ikke praktisk anvendelse af IT-værktøjer samt "opmærksomhedsstjelende" muligheder på en online computer.

I forhold til materialets løsningsdel er det vigtigt at pointere, at mine løsningsforslag ikke nødvendigvis afdækker alle muligheder, da nogle opgaver muligvis kan løses på andre måder end jeg har valgt at gøre i løsningsforslagene. Opgaver og løsningsforslag er relativt gennemarbejdede, men skulle du mod forventning finde fejl eller har forslag til rettelser, så er du velkommen til at kontakte mig pr. mail.

Jeg håber du vil finde materialet brugbart.

På næste side finder du en oversigt over de enkelte opgaver i dette hæfte, sværhedsgrad, forventet tidsforbrug mm.

Med venlig hilsen

Lasse Heisz Ebsen

lasseheisz@gmail.com

INDHOLD:

OPGAVE	SVÆRHEDSGRAD	ARBEJDSSTID	MATEMATIKKEN I OPGAVEN
Nr.1 - Talfølger (2)	☆☆☆☆	Ca. 1-2 lektioner	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Talrækker, værdien "n", formler til bestemmelse af "n".
Nr.2 - Voksende trapezer	☆☆☆	Ca. 1-2 lektioner	Overordnet område: Geometri Underemner: Areal og omkreds, Pythagoras, voksende figurrækker, værdien "n", formler til bestemmelse af "n".
Nr.3 - Talsummer	☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: De naturlige tal, talsummer, værdien "n", formler til bestemmelse af "n".
Nr.4 - Trekanttall	☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: De naturlige tal, talsummer, værdien "n", formler til bestemmelse af "n".
Nr.5 - Et talmysterie (2)	☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Positionssystemet (titalssystemet), multiplikation.
Nr.6 - Fire cirkler	☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Geometri Underemner: Omkreds og areal af cirkler.
Nr.7 - Periferivinkler	☆☆☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Geometri Underemner: Cirkler, centervinkler, periferivinkler, bevisførelse.
Nr.8 - Sumtrekanter	☆☆	Ca. 1 lektion	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Talsummer, "talpusleri".
Nr.9 - Romersk regning	☆☆☆☆	Ca. 2 lektioner	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Positionssystemet, "romertal", symbolbehandling.
Nr.10 - Et mønster med centicubes (3)	☆☆☆☆☆	Ca. 1-2 lektioner	Overordnet område: Tal og algebra Underemner: Voksende figurrækker, reduktion, værdien "n", formler til bestemmelse af n.

Vedr. "sværhedsgrad": Opgavernes sværhedsgrad er forsøgt vurderet ud fra et "middel" 9.klasse niveau. "Tre stjerner" indikerer, at det må være forventeligt, at en middel elev i 9.klasse vil kunne arbejde selvstændigt med det meste af opgaven. Færre stjerner indikerer at opgaven er "lettere", og flere end tre stjerner indikerer, at opgaven vil være vanskeligere at løse.

Vedr. "arbejdstid": Den forventelige arbejdstid med opgaven er vurderet ud fra antallet af delspørgsmål samt sværhedsgrad, og er inklusiv læreropfølgning.

Andre opmærksomheds punkter: Opgave 10 "Et mønster med centicubes (3)" skal printes i farve.

TALFØLGER (2)

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

I nedenstående skema er vist nogle talfølger.

En talfølge er en række af tal som følger et bestemt mønster eller en bestemt "regel".

Hvis man kender "reglen" kan man måske udtrykke den som algebraisk formel med bogstavet n .

Bogstavet n er i denne sammenhæng et vilkårligt *trin* i den beskrevne talrække.

(Mere teoretisk: Bogstavet n står for "naturlige tal", som er alle positive heltal)

	Trin 1	Trin 2	Trin 3	Trin 4	Trin 5	Trin 7	Formel eller "Regel" for n 'te trin
TALFØLGE 1	2	6	12	20	30		
TALFØLGE 2	1	5	9	13	17		
TALFØLGE 3	1	2	4	7	11		
TALFØLGE 4	3	9	27	81	243		
TALFØLGE 5	1	2	27	64	125		
TALFØLGE 6	3	6	11	18	27		
TALFØLGE 7	5	8	11	14	17		
TALFØLGE 8	1	3	7	15	31		
TALFØLGE 9	1	4	7	10	13		
TALFØLGE 10	1	5	13	25	41		

OPGAVER -

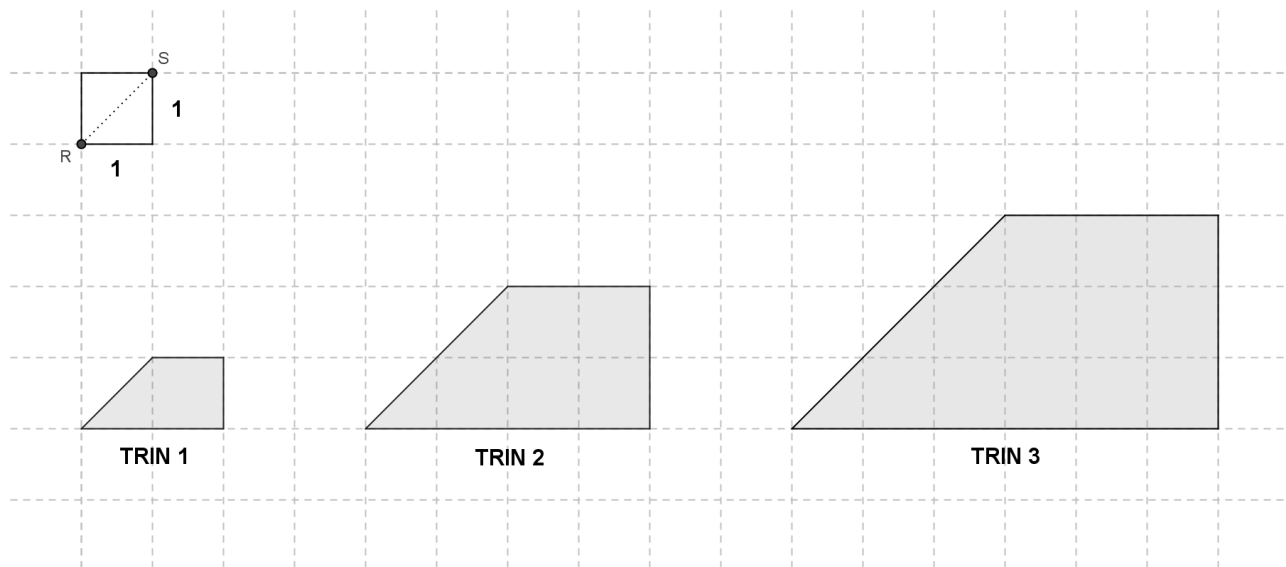
1. Bestem det 7. tal i alle talfølgerne.
2. Forsøg at finde en formel, der gælder for trin n i alle talfølgerne.

VOKSENDE TRAPEZÉR

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder ses en række voksende trapezér.

På tegningen er der øverst i venstre hjørne vist enhedskvadratet m. sidelængden 1 og diagonalen RS.



OPGAVER -

1. Bestem arealet af de tre viste trapezér.
2. Bestem diagonallængden (RS) i enhedskvadratet.
3. Bestem omkredsen af de tre viste trapezér.
4. Find areal og omkreds af trapezét på trin 7. (Udfyld evt. nedenstående skema)

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	7	n ?
AREAL								
OMKREDS								

5. Forsøg at finde frem til et udtryk for areal og omkreds af figuren på trin n .

TALSUMMER

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

At lægge naturlige tal sammen (addere) kan de fleste mestre på et vist niveau. De naturlige tal omfatter de hele positive tal, dvs. tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 osv.

Det er enkelt at finde summen af små talrækker, som f.eks. tallene fra 1 - 10, men det begynder at blive lidt mere besværligt og tidskrævende, hvis vi ønsker at finde summen af længere talrækker.

Findes der mon et system i måden, summerne fremkommer på ?

Se på nedenstående talrækker.

...

Trin 10 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Trin 11 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Trin 12 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Trin 13 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Trin 14 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

Trin 15 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Osv...

OPGAVER -

1. Hvad er summen af tal på *trin 1* ? Og på *trin 5* ?

2. Udregn summen for ovenstående trin, og notér i skemaet herunder.

TRIN NR.	10	11	12	13	14	15	100	<i>n</i> ?
TALSUM								

3. Forsøg at finde frem til en metode, der kan anvendes, hvis summen af de naturlige tal på et tilfældigt trin skal udregnes.

4. Hvad er summen af alle naturlige tal fra 1 til 100 ?

TREKANTTAL

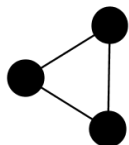
Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder er vist en figurrække.

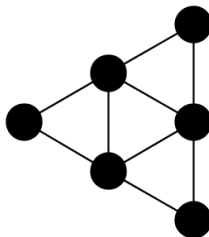
”Prikkerne” kan udgøre en trekant, og det antal prikker der er i figurerne kaldes for *trekanttal*.



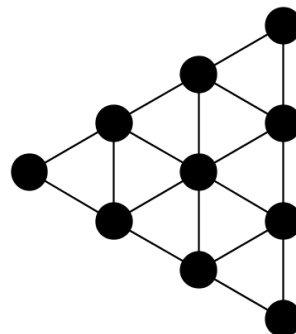
TRIN 1



TRIN 2



TRIN 3



TRIN 4

OPGAVER -

1. Udfyld skemaet nedenfor. (indtil trin 6)

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	10	n
ANTAL PRIKKER	1	3	6					

2. Hvordan ser tal nr. 10 ud ?

3. Beskriv hvordan *trekantstallene* vokser.

4. Begrund en metode til bestemmelse af antal prikker i figur n .

ET TALMYSTERIE (2)

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Tal kan have mange forunderlige egenskaber. Denne opgave handler om bestemte tocifrede tal og det der sker, hvis du multiplicerer dem med hinanden.

Her følger en påstand om multiplikation:

Hvis 2 tocifrede tal har samme antal tiere, og antallet af enere tilsammen giver 10, er det nemt at regne.

Læg 1 til den ene tier og gang tierne med hinanden.

Så ganger du enerne med hinanden.

Skriv tier resultatet efterfulgt af ener resultatet.

Nu har du facit.

Ex 84×86 . (tallene har samme antal tiere og enere giver tilsammen 10)

$9 \times 8 = 72$ (der er lagt 1 til den ene tier, og tierne ganges med hinanden)

$4 \times 6 = 24$ (enerne ganges med hinanden)

Facit = 7224

På billedet til højre er ovenstående resultat "kontrolleret" med en mere traditionel regnemetode. Du kan måske bruge regneeksemplet i din opgaveløsning.

E	K	S.		8	4	X	8	6		
8	0	X	8	0		=	6	4	0	0
	4	X	8	0		=		3	2	0
	6	X	8	0		=		4	8	0
	4	X	6			=			2	4
I		A	L	T		=	7	2	2	4

OPGAVER -

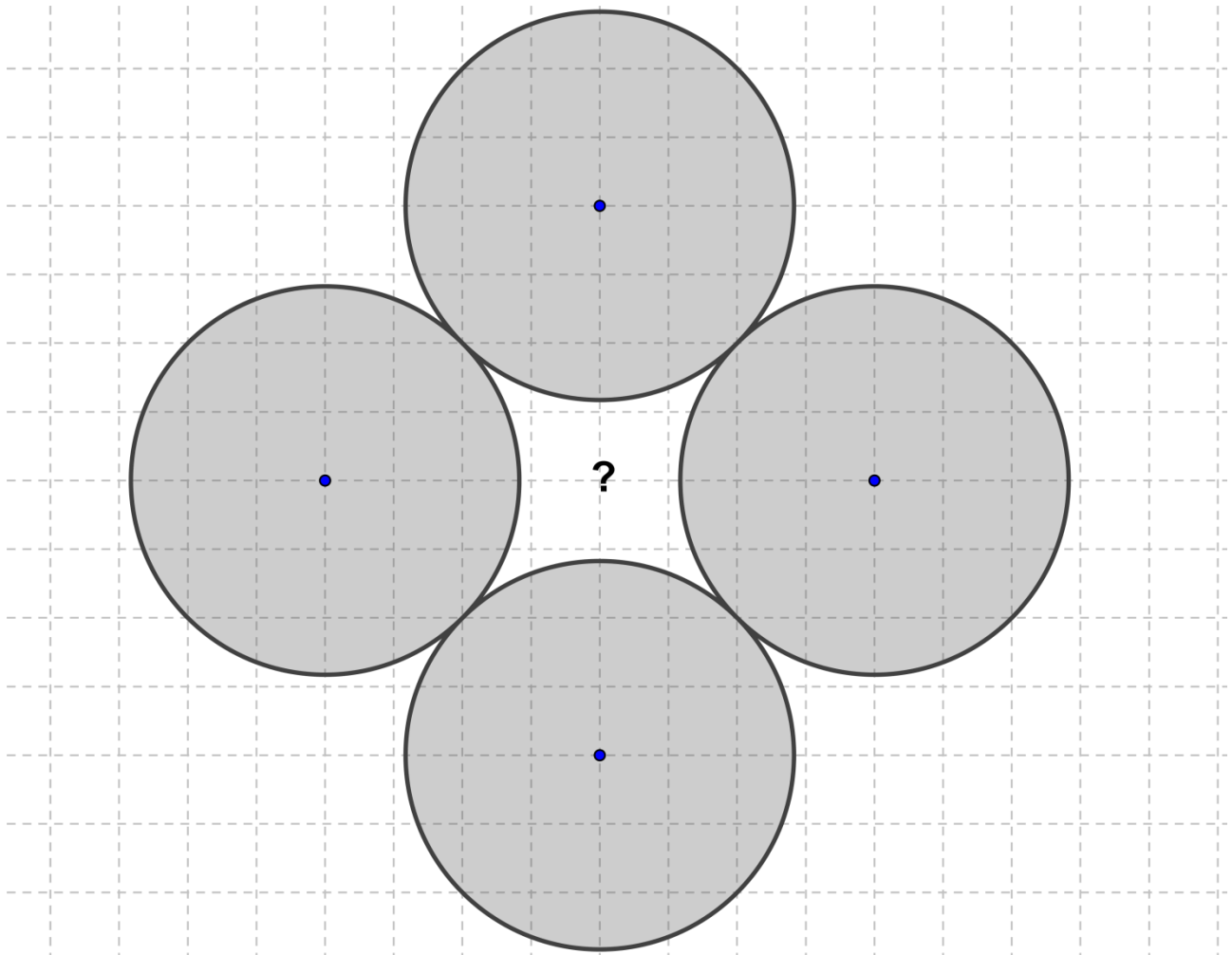
1. Undersøg påstanden ovenfor vha. flere taleksempler.
2. Begrund *hvorfor* eller *hvorfor ikke* påstanden holder.

FIRE CIRKLER

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder er vist fire ens cirkler, der tangerer hinanden således, at der dannes et lukket rum i mellem dem.

Cirklernes omkreds er 18,85 cm.



OPGAVER -

1. Bestem arealet af området imellem de fire cirkler.

PERIFERIVINKLER

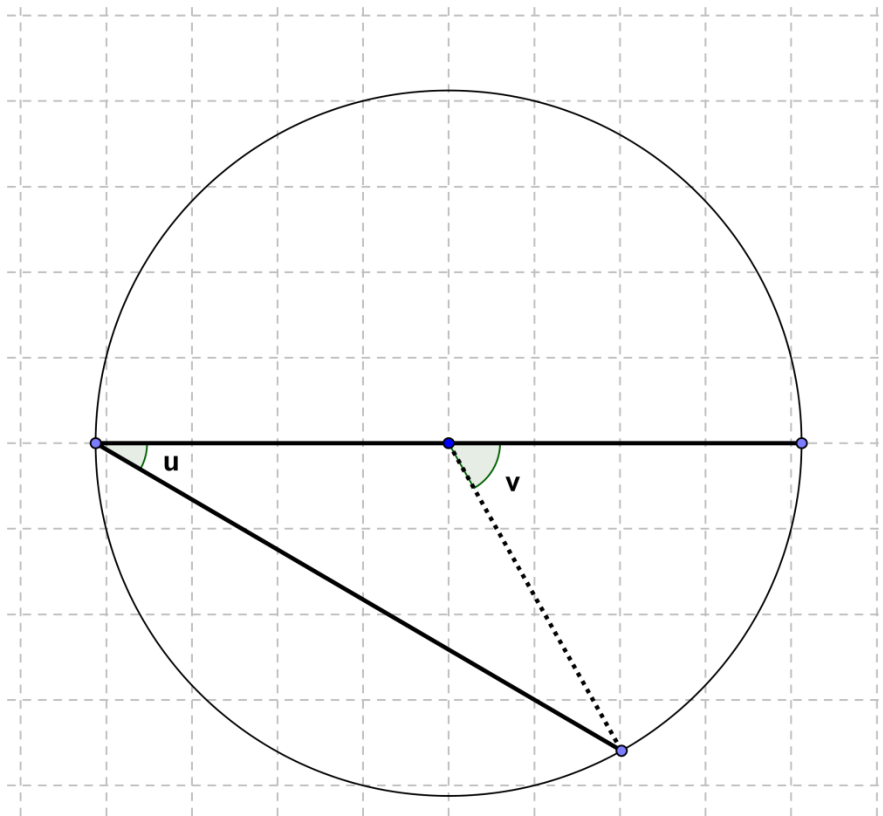
Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Figuren nedenfor viser en cirkel med en *periferivinkel* ($\angle u$). En periferivinkel er en vinkel, hvis toppunkt ligger på cirkelperiferien, og hvis ben skærer cirklen.

I figuren er også vist en *centervinkel* ($\angle v$). En centervinkel er en vinkel, hvis toppunkt ligger i cirkelns centrum. Den deler cirklen i to buer.

Om centervinkler ved vi at: *en centervinkel er lige så stor som den cirkelbue den spænder over.*

Den følgende opgave handler kun om de periferivinkler, hvis ene ben går gennem cirkelns centrum.



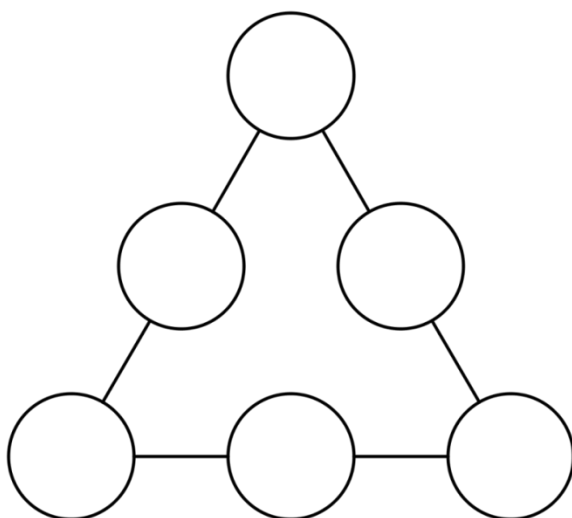
OPGAVER -

1. Redegør for hvilken type trekant $\angle u$ er en del af.
2. Find variable udtryk der fortæller om størrelsen af de to sidste vinkler i denne trekant.
3. Bevis at *en periferivinkel er halvt så stor som den cirkelbue den spænder over.*

SUMTREKANTER

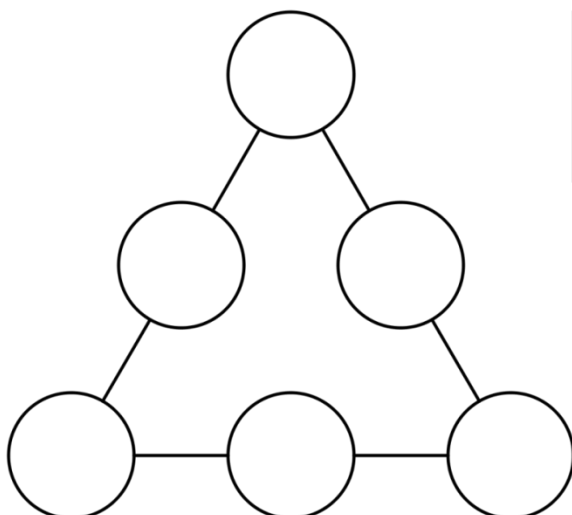
Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder ses to "sumtrekanter".



SUMTREKANT 1

Indsæt tallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6 således, at talsummen bliver den samme på "trekantens" tre sider.



SUMTREKANT 2

Indsæt tallene 2, 4, 6, 8, 10 og 12 således, at talsummen bliver den samme på "trekantens" tre sider.

OPGAVER -

1. Udfyld de to sumtrekanter således, at talsummen bliver den samme på "trekantens" tre sider.
2. Efterprøv om der er flere løsningsmuligheder.
3. Kan du finde på en strategi, der gør det nemmere at finde en løsning med andre tal? f.eks. tallene 1, 3, 5, 7, 9, 11.
4. Begrund den mindst mulige og den størst mulige talsum i trekant 1 og 2.

ROMERSK REGNING

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Romertallene stammer fra *etruskerne*, som var et folkeslag der levede i det nuværende nordlige Italien frem mod ca. år 200 f.kr. Fra da af var *Etrurien* (landområde) og etruskerne en del af det voksende Romerrige. Det var ikke kun etruskernes landområder som romerne tog, men også deres talsystem. Talsystemet eller rettere *tegnene*, der senere er blevet kendt som ”Romertal”, blev brugt i Europa indtil araberne introducerede europæerne for *ti-talsystemet* i ca. år 1120 e.kr. Ti-talsystemet blev i øvrigt opfundet i Indien omkring år 500 e.kr. Ti-talsystemet blev det dominerende i Europa i løbet af 1500-tallet.

(Kilder: *denstoredanske.dk*, *wikipedia.dk* og *Historisk Verdensatlas* af John Haywood 1999)

De ”romerske” regneregler.

Romertallene tager udgangspunkt i 7 tegn.

I = 1	V = 5	X = 10	L = 50	C = 100	D = 500	M = 1000
-------	-------	--------	--------	---------	---------	----------

Et tegn, som står foran et større tegn, trækkes fra dette (*gælder kun for I, X og C*), og der må kun stå ét mindre tal foran et større. For eksempel...

IV = 4	IX = 9	XL = 40	XC = 90	CM = 900
--------	--------	---------	---------	----------

Et tegn, som står efter et tegn med samme eller større værdi, lægges til dette. For eksempel...

III = 3	XV = 15	XVII = 17	XX = 20	LXI = 61	CL = 150	MXI = 1011
---------	---------	-----------	---------	----------	----------	------------

Et tegn, som står mellem to tegn af større værdi, trækkes fra det andet og resten lægges til det første. For eksempel...

XIV = 14	LIX = 59	MCD = 1400	MCMXCVIII = 1998
----------	----------	------------	------------------

Romertallene sammensættes ved at sige: 1000’ere + 100’ere + 10’ere + 1’ere.

Det største tal, der kan skrives efter denne regel er 3999, da man højst gentager et tegn op til tre gange efter hinanden. ”V”, ”L” og ”D” gentages aldrig.

Større tal opnås ved at sætte en streg over romertallet, hvilket betyder, at tallet ganges med 1000.

OPGAVER -

1. Skriv disse tal som romertal: 6, 19, 44, 701 og 2578.
2. Skriv disse tal som arabertal: VI, XXIX, CXIV, CDXLIV og MMMXMIV.
3. Løs disse fire regneopgaver og angiv svaret som romertal.
(a. $367 + 489$), (b. $XLII + CXXIX$), (c. $345 - 197$), (d. $MMCCCXLVII - MCMXV$)
4. Forsøg at nå frem til en metode hvormed du kan løse additions - og subtraktionsopgaver med romertal - uden brug af arabertal.

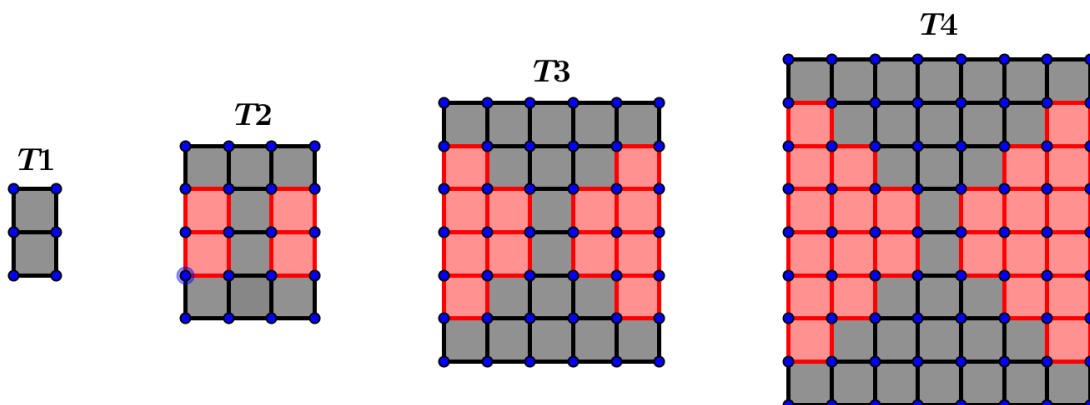
Matematisk tankegang og ræsonnement (del 2)

©Lasse Heisz Ebsen

Et mønster med centicubes (3)

Ræsonnement - og tankegangskompetencen

Herunder er vist en figurrække. T1 står for *trin 1*, T2 for *trin 2* osv.



OPGAVER -

1. Du skal undersøge antallet af centicubes i figurerne på trin 2, 3, 4 og 5, og udfylde tabellen herunder indtil trin 5.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	10	n ?
SORTE CUBES	2						
RØDE CUBES	0						

2. Du skal forsøge, at finde et udtryk der gælder for antallet af sorte centicubes på trin n . (Udfyld tabellen)

3. Du skal reducere udtrykket $4\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$ og vise, at det gælder for antallet af røde centicubes. (Udfyld tabellen)

4. Du skal forsøge, at finde et udtryk der gælder for det samlede antal centicubes på trin n .

OPGAVE 1 - "Talfølger (2)"**Løsninger opg. 1 og 2.**

	Trin 1	Trin 2	Trin 3	Trin 4	Trin 5	Trin 7	Formel eller "Regel" for n'te trin
TALFØLGE 1	2	6	12	20	30	56	$n^2 + n$
TALFØLGE 2	1	5	9	13	17	25	$4n - 3$
TALFØLGE 3	1	2	4	7	11	22	$\frac{n^2 - n + 2}{2}$
TALFØLGE 4	3	9	27	81	243	2187	3^n
TALFØLGE 5	1	2	27	64	125	343	n^3
TALFØLGE 6	3	6	11	18	27	51	$n^2 + 2$
TALFØLGE 7	5	8	11	14	17	23	$3n + 2$
TALFØLGE 8	1	3	7	15	31	127	$2^n - 1$
TALFØLGE 9	1	4	7	10	13	19	$3n - 2$
TALFØLGE 10	1	5	13	25	41	85	$2x^2 - 2x + 1$

OPGAVE 2 - "Voksende trapezér"

1. Da enhedskvadratet udgør 1 arealenhed, kan arealerne "tælles". Formlen for trapezér's areal kan også benyttes: $\frac{1}{2} \times h \times (a + b)$.

Trin 1 = 1,5

Trin 2 = 6

Trin 3 = 13,5

2. Diagonallængden i enhedskvadratet kan bestemmes vha. Pythagoras (el. måles)

$1^2 + 1^2 = c^2$, og dermed er diagonalen RS lig med $\sqrt{2}$.

3. Da vi nu har et udtryk for den skrå sidelængde, kan omkredsen let bestemmes.

Omkreds T1 = $4 + \sqrt{2}$ Omkreds T2 = $8 + 2\sqrt{2}$ Omkreds T3 = $12 + 3\sqrt{2}$

4.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	7
AREAL	1,5	6	13,5	24	37,5	54	73,5
OMKREDS	$4 + \sqrt{2}$	$8 + 2\sqrt{2}$	$12 + 3\sqrt{2}$	$16 + 4\sqrt{2}$	$20 + 5\sqrt{2}$	$24 + 6\sqrt{2}$	$28 + 7\sqrt{2}$

5. N'te areal ? $n^2 + \frac{1}{2}(n^2)$

N'te omkreds ? $4n + n\sqrt{2}$

OPGAVE 3 - "Talsummer"

1. Da trin nummeret ser ud til at angive hvilke på hinanden følgende naturlige tal der skal adderes, startende med tallet 1, må trin 1 nødvendigvis kun omfatte *tallet 1*. Summen vil derfor være 1. Trin 5 må omfatte de naturlige tal (1, 2, 3, 4 og 5) Tallenes sum er lig med 15.

2.

TRIN NR.	10	11	12	13	14	15	100	<i>n ?</i>
TALSUM	55	66	78	91	105	120	5050	Se opg. 3

3. Opskrives talsummer fra fx trin 1 og fremefter systematisk, vil nogle elever måske genkende den talrække der fremkommer. Talrækken svarer til *trekantttallene*, hvorfor den samme formel naturligvis kan anvendes. *Summen af naturlige tal på n'te trin* = $\frac{n^2+n}{2}$.

4. Summen af alle naturlige tal fra 1-100 må da være: $\frac{100^2+100}{2} = 5050$.

OPGAVE 4 - "Trekanttal"**1.**

TRIN NR.	1	2	3	4	5	6	10	<i>n</i>
ANTAL PRIKKER	1	3	6	10	15	21	55	<i>se opg.4</i>

2. Det 10'ende tal kan bestemmes ved, at figurrækken "tegnes" videre, eller ved at systemet i den voksende talrække afkodes.

3. Den voksende talrække kan beskrives på flere måder. Fx *stiger antallet af prikker hele tiden med et antal svarende til det næste trin nr.* Eller *antallet af prikker på et trin, svarer til den samlede talsum af alle forrige trin inkl. det nuværende.*

4. Fx $\frac{n^2+n}{2}$. (Eller se opg.3)

OPGAVE 5 - "Et talmysterie (2)"

1. Lav undersøgelse med forskellige taleksempler. Undersøgelsen vil vise, at påstanden (for det meste) holder. (hvis man bruger tal hvor 1 og 9 udgør enerne i de to tal, skal der indsættes et nul foran 9 tallet, dvs. 09).

2. Påstanden holder (se undtagelse ovenfor) fordi, multiplikationen indeholder det samme antal tiere og antallet af enere også giver ti tilsammen. Hvis vi opdeler multiplikationen bliver det lettere at se.

Eks. 72×78

samme antal tiere, enerne giver tilsammen ti.

Resultatet skal da være $(7 + 1) \times 7$ efterfulgt af $(2 \times 8) = 5616$

72×78

svarer til $(70 \times 70) + (2 \times 70) + (70 \times 8) + (2 \times 8)$

Hvilket svarer til:

$(80 \times 70) + (2 \times 8) = 5600 + 16 = 5616$

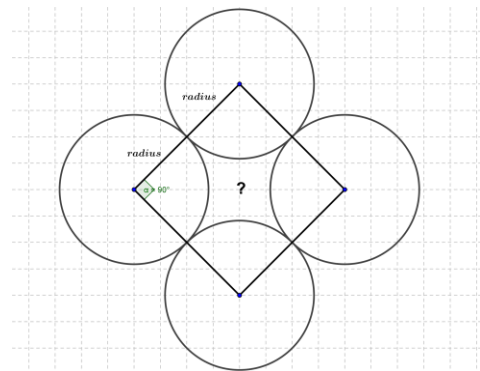
Denne opdeling illustrerer hvad der i virkeligheden foregår i denne multiplikationsmetode.

Da antallet af "enere" giver ti tilsammen, svarer dette til "10 gange mere" af de tiere der multipliceres med jf. $(2 \times 70) + (70 \times 8)$. Dette begrundes den +1 man skal lægge til den ene tier i begyndelsen. Herved fås multiplikationen 8×7 , men da det i virkeligheden er tiere vi multiplicerer, svarer det til (80×70) . Slutteligt kan de multiplicerede enere blot adderes.

OPGAVE 6 - "Fire cirkler"

Cirklerne tangerer hinanden i 90 graders vinkler, hvilket gør, at der kan konstrueres et indvendigt kvadrat, hvis sidelængder må være 2 gange cirkelns radius eller blot cirkelns diameter.

De fire cirkelstykker der er en del af det indvendige kvadrat, udgør alle *kvartcirkler*. Arealet af området i mellem de fire cirkler må derfor kunne bestemmes ved: *(areal indvendigt kvadrat) minus (areal af én cirkel)*.



Da vi kender omkredsen af cirklerne, kan diameteren bestemmes vha. formlen for cirkelns omkreds. ($Omkreds = diameter \times \pi$)

$$Diameter = \frac{18,85}{\pi}$$

$$Diameter = 6 \text{ cm}$$

Arealet af område mellem cirklerne må da kunne bestemmes ved:

$$6^2 - (3^2 \times \pi) = 7,73 \text{ cm}^2$$

OPGAVE 7 - "Periferivinkler"

1. Da to af trekantens "ben" udgør radius i cirklen, må det være en *ligebenet trekant*.

2. Da trekanten er ligebenet må begge vinkler ved cirkelperiferien ved lig med u . Diameteren i cirklen spænder over 180° , og derfor er den sidste vinkel i trekanten lig med $180 - v$.

3. Vi er interesserede i at finde et udtryk for periferivinklen u . Beviset kan laves som følger:

$$180 - v + 2u = 180$$

$$180 + 2u = 180 + v \quad (v \text{ er adderet på begge sider})$$

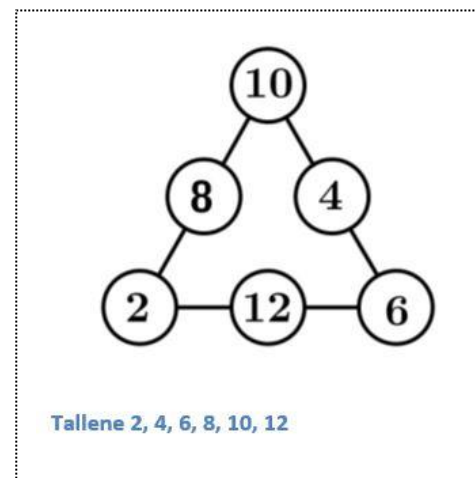
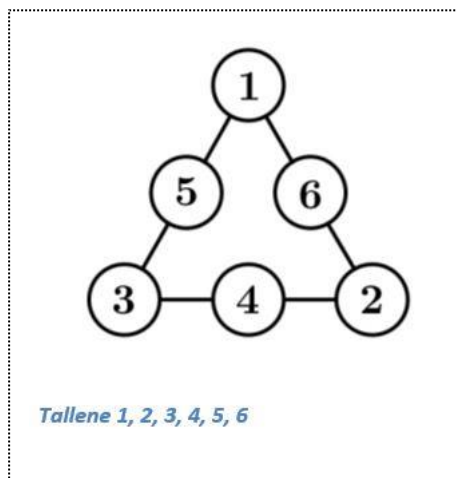
$$2u = v \quad (180 \text{ er subtraheret på begge sider})$$

$$u = \frac{1}{2}v \quad (\text{der er divideret med } 2 \text{ på begge sider})$$

Hermed har vi vist, at periferivinklen u er halvt så stor som centervinklen v .

OPGAVE 8 - "Sumtrekanter"

1. For eksempel:



2. Ja der er flere forskellige løsningsmuligheder.

3. Fx kan der startes med enten de mindste eller største tal i de tre "hjørner". Herefter fordeles de tre sidste tal efter "ligevægtsprincippet". Se bl.a. første løsning ovenfor. I alle løsninger er det et gennemgående princip, at de største tal skal i samme række/linje som de mindste, næst største med næst mindste osv. jf. ligevægten.

4. Den mindst mulige talsum vil være den, hvor de tre mindste tal placeres i trekantens hjørner. Alle hjørnetal indgår to gange i en sum, og derved vil værdien af tallene i trekantens hjørner være afgørende for værdien af den samlede sum. Samme overvejelse gælder naturligvis for størst mulige talsum.

I trekant 1 er den mindst mulige talsum = 9, og den størst mulige = 12.

I trekant 2 er den mindst mulige talsum = 18, og den størst mulige = 24.

OPGAVE 9 - "Romersk regning"

1. $6 = VI$, $19 = XIX$, $44 = XLIV$, $701 = DCCI$, $2578 = MMDLXXVIII$.

2. $VI = 6$, $XXIX = 29$, $CXIV = 114$, $CDXLIV = 444$, $MMMCMIV = 3994$

3. a) *DCCCLVI*b) *CLXXI*c) *CXLVIII*d) *CDXXXII*

4. Additions - og subtraktionsopgaver med romertal kan løses næsten som almindelig regneopgaver, som vi kender fra vores eget 10-talsystem. At regne med romertal kræver blot en smule overblik i forhold til symbolernes betydning.

Lad os se på eksemplerne $CXXIX + XLII$ (129+42) samt $MMCCCXLVII - MCMXV$ (2347 - 1915).

Eksempel 1. Additionsopgaven $CXXIX + XLII$.

1. Der "veksles" således, at vi opnår enslydende symboler der kan adderes: $CXXVIII + XXXII$.
2. De enslydende symboler adderes: $CXXXXXXXXVIII$.
3. Der "veksles" tilbage til et forkortet og mere korrekt udtryk: $CLXXI$. (171).

Eksempel 2. Subtraktionsopgaven $MMCCCXLVII - MCMXV$.

1. Der "veksles": $MCCCCCCCCCCCCXXXVII - MCCCCCCCCCXV$.
2. Symbolerne fra det andet udtryk "fjernes"/subtraheres fra det første: $CCCCXXXII$.
3. Der "veksles" tilbage til et forkortet og mere korrekt udtryk: $CDXXXII$. (432).

OPGAVE 10 - "Et mønster med centicubes (3)"

1. Antallet af centicubes fra trin 2-4 kan tælles på opgavearket. Figuren på trin 5 kan hurtigt konstrueres ved at fortsætte mønsteret fra de forrige figurer.

TRIN NR.	1	2	3	4	5	10	$n ?$
SORTE CUBES	2	8	18	32	50	200	
RØDE CUBES	0	4	12	24	40		

2. Hvis figurerne deles vandret på midten fås en symmetriakse der "deler" figurerne i to identiske halvdele - en øvre og en nedre. "Tælles" antal cubes i én figurdelt på de forskellige trin fås tallene:

1, 4, 9, 16 osv. Disse tal genkendes muligvis som kvadrattallene. Da samme talrække forekommer to gange i hver figur, kan vi udlede formelen: $2n^2$.

3. Vi reducerer udtrykket: $4\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$

$$4\left(\frac{n^2-n}{2}\right) \Rightarrow \frac{4n^2-4n}{2} \Rightarrow 2n^2-2n$$

Ved hurtigt afprøvning kan det konstateres, at formelen gælder for antallet af "røde centicubes".

4. Det samlede antal centicubes på trin n , må kunne findes ved, at addere vores to formler:

$$2n^2 + 2n^2 - 2n \Rightarrow 4n^2 - 2n$$

Ved hurtig afprøvning kan det konstateres, at formelen gælder for antallet af centicubes i alt.